Bakkalaureatsarbeit

Distributionen

und

Fourier-Transformation

Im Rahmen der VU Signale und Systeme Vertiefung

LVA Nr. 351.022

Wintersemester 2005/06

Karl Rupp

Matr. Nr. 0325941

Wien, im Jänner 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

Der Funktionsbegriff ist ein sehr fundamentaler in der Mathematik, der es vermag, viele Probleme zu lösen. Dennoch stellt er sich als unzureichend für gewisse Probleme heraus, etwa zur Modellierung einer punktförmigen Quelle.

Die Theorie der Distributionen löst sich daher vom gewöhnlichen Funktionsbegriff und gilt neben der Maßtheorie als eine der großen Errungenschaften des 20. Jahrhunderts. Während die Maßtheorie die Integralrechnung in gewisser Weise vervollständigt, vervollständigen die Distributionen die Differentialrechnung. Es wird uns möglich sein, für beliebige, lokal integrierbare Funktionen Ableitungen zu erklären. Das erste Kapitel führt in die Distributionen ein, wobei aber auf manche (hauptsächlich technische) Beweise verzichtet wurde.

Auf der anderen Seite hat sich die Fourier-Transformation in vielen Anwendungsbereichen als sehr nützlich herausgestellt und ergänzt sich wunderbar mit Distributionen, etwa im Bereich der Systemtheorie oder im Bereich der partiellen Differentialgleichungen. Der große Vorteil der Fourier-Transformation besteht darin, analytische Operationen in algebraische überzuführen. Weiters wird das Faltungsprodukt in ein gewöhnliches Produkt transformiert, was die Rechnung wesentlich vereinfachen kann. Im zweiten Kapitel sind diese und weitere Eigenschaften abgehandelt.

Im dritten Kapitel sollen konkrete Einsatzbereiche der Distributionen und Fourier-Transformation anhand von Beispielen vorgestellt werden. Diese Auswahl ist selbstverständlich nur eine kleine Menge in der großen Vielfalt von Anwendungsmöglichkeiten, jedoch hoffe ich, die großteils gemeinsamen Konzepte dem Leser näherbringen zu können.

In diesem Sinne möchte ich meinen Lesern viel Freude an dieser Arbeit wünschen.

Karl Rupp,
Wien, im Jänner 2006

Kapitel 1

Distributionen

In diesem Abschnitt wollen wir zuerst Distributionen als verallgemeinerte Funktionen motivieren, diese definieren und elementare Eigenschaften erörtern sowie uns das nötige Handwerk für die nachfolgenden Abschnitte aneignen. Freilich ist die Theorie der Distributionen eine viel größere, als dass sie hier vollständig abgehandelt werden kann. Für weitergehendes Studium sei daher an die umfassende Literatur verwiesen.

1.1 Motivation

Vor allem in messtechnischen Aufgaben ist es von Interesse, den Verlauf einer (physikalischen) Größe $f(x)$ an einem Punkt x_0 zu bestimmen. Aufgrund der stets vorhandenen räumlichen Ausdehnung des Sensors wird jedoch nicht der exakte Wert $f(x_0)$ gemessen, sondern vielmehr ein Mittelwert von $f(x)$ in einer Umgebung von x_0.

Um diesen Sachverhalt auch mathematisch auszudrücken, wird vielmehr der Wert

$$\int f(x)\varphi(x)dx \tag{1.1}$$

mit einer geeigneten Gewichtsfunktion $\varphi(x)$ ermittelt. Für diese „Mittelung“ muss freilich

$$\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x, \qquad \text{sowie} \qquad \int \varphi(x)dx = 1$$

gelten, wobei sich das Integral über den gesamten Raum erstreckt. φ wird vor allem in der Umgebung von x_0 Werte ungleich 0 annehmen. In erster Näherung können wir uns beispielsweise im eindimensionalen Fall φ als Rechtecksfunktion mit Mittelpunkt x_0 vorstellen.

Wie beschreiben wir aber mathematisch eine „perfekte Messung“? Wir suchen nach einem Operator M, der auf eine Funktion f durch

$$Mf = f(x_0) \tag{1.2}$$

wirkt, gesucht ist also ein *Auswertungsoperator*. Wie müsste nun φ in (1.1) gewählt werden, sodass gleichzeitig auch (1.2) erfüllt ist?

Eine Funktion im herkömmlichen Sinn kann die a priori widersprüchlichen Forderungen nach einerseits einpunktigem Träger und andererseits nichtverschwindendem Integral im Lebesgueschen Sinn nicht erfüllen. Da aber ohnehin der Wert $f(x_0)$ nicht exakt messbar ist, möchten wir unsere Ansicht, dass f einen Wert an einem speziellen Punkt hat, aufgeben und eine größere Klasse von Objekten (*verallgemeinerte Funktionen*) betrachten.

Von diesen *verallgemeinerten Funktionen* verlangen wir, dass etwas wie

$$\int f(x)\varphi(x)dx$$

für sinnvollen Mittelungen φ (im folgenden *Testfunktionen* genannt) weiterhin existiert. Des weiteren sollen Linearität und ein noch zu präzisierender Begriff der Stetigkeit erhalten bleiben. Damit hätten wir nun die wesentlichen Vorüberlegungen angestellt, um Distributionen definieren zu können.

1.2 Testfunktionen und Funktionale

Die genaue Wahl der Testfunktionen ist natürlich sehr wichtig, da von ihr die gesamte Theorie abhängt, die anschließend darauf aufgebaut wird. Die von L. Schwartz vorgeschlagene Klasse $\mathcal{D}$ von Testfunktionen führte dabei zu einer sehr eleganten und nützlichen Theorie. Wir konzentrieren uns im folgenden auf den n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1. *In $\mathcal{D}(\Omega)$ liegen alle (komplexwertigen) unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger $K \subset \Omega$. Genauer: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, dann ist*

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{C} : \varphi \in C^\infty(\Omega) | \operatorname{supp}(\varphi) = K \subset \Omega \textit{ ist kompakt}\}$$

Es ist unmittelbar klar, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ ein Vektorraum ist. Um weitere Begriffe wie Stetigkeit zur Verfügung zu haben, benötigen wir eine Topologie τ auf diesem Raum. Die in weiterer Folge verwendete vollständige, lokal konvexe Topologie τ ist auf direktem Weg nicht ganz einfach zu beschreiben, wir beschränken uns hier auf die Erklärung der Konvergenz gegen Null. Wir werden von nun an mit $\mathcal{D}(\Omega)$ immer den topologischen Vektorraum $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ assoziieren. Für detailliertere Ausführungen sei z.B. auf [6] und [9] verwiesen.

Definition 1.2. *Eine Folge (φ_i) konvergiert in $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen Null, wenn es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ gibt, sodass $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq K \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und*

$$D^\alpha \varphi_i \to 0 \qquad \textit{gleichmäßig für } i \to \infty \textit{ und alle Multi-Indizes } \alpha$$

Mit dem eben eingeführten Begriff der Konvergenz gegen Null ist automatisch auch die Konvergenz gegen ein beliebiges φ erklärt, da ja $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ ein topologischer Vektorraum ist.

Wir können nun die *Distributionen* einführen:

Definition 1.3. *Eine lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$, das stetig (in Bezug auf die oben angegebene Topologie τ) ist, heißt* Distribution auf Ω.

Da Stetigkeit und Beschränktheit äquivalent sind und zusätzlich die Begriffe Stetigkeit und Folgenstetigkeit nicht zerfallen, obwohl die oben erwähnte Topologie nicht metrisierbar ist [6], haben wir mehrere Möglichkeiten, ein lineares Funktional auf „Distributionsfähigkeit“ zu testen.

Nun wollen wir gezielt Distributionen konstruieren: Für $f \in L^1_{lok}(\Omega)$ definieren wir das Funktional

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \Omega \tag{1.3}$$

und erhalten eine Distribution. Die Linearität von T_f folgt aus der Linearität des Integrals, die Stetigkeit zeigen wir über die Beschränktheit:

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_{\text{supp}(\varphi)} f(x)dx \sup_{x\in\text{supp}(\varphi)} |\varphi(x)| < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Umgekehrt können wir durch die Konstruktion in (1.3) eine große Klasse von Distributionen mit einer Art „Dichtefunktion“ f identifizieren, da die Abbildung $f \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ für $f \in L^1_{lok}$ injektiv ist.

Definition 1.4. *Gibt es zu einer Distribution T ein $f \in L^1_{lok}$, sodass mit T_f von (1.3)*

$$T(\varphi) = T_f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

gilt, so heißt T reguläre Distribution. *Andernfalls heißt T* singuläre Distribution.

Als Beispiel für eine singuläre Distribution wäre die *Diracsche Deltadistribution* δ zu nennen, die gerade unsere Suche nach einem Auswertungsoperator wie in (1.2) beendet. Speziell gilt also

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Des weiteren können wir auch Ableitungen von Distributionen erklären.

Definition 1.5. *Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und einen Multi-Index α erklären wir die* Ableitung im distributionellen Sinn *als*

$$(D^{(\alpha)}T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.4}$$

Diese Definition ist nicht reine Willkür, sondern konsistent zur Ableitung einer differenzierbaren Funktion: Für den eindimensionalen Fall gilt beispielsweise für die von $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ auf $\Omega = (0,1)$ induzierte Distribution:

$$T_{f'}(\varphi) = \int_0^1 f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{f(x)\varphi(x)|_0^1}_{=0} - \int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx = (-1)T_f(\varphi')$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Auf gleiche Weise funktioniert die Rechnung auch in mehreren Dimensionen. Wir können daher auf diese Weise Ableitungen für jede beliebige (lokal integrierbare) Funktion f einführen, auch wenn die Ableitungen selbst im Allgemeinen keine Funktionen mehr sind.

Es gibt noch viele weitere interessante Erkenntnisse in der Theorie der Distributionen, wir werden aber an dieser Stelle in Richtung der Fourier-Transformationen abzweigen und nur noch ein paar wichtige Eigenschaften und Erweiterungen von $\mathcal{D}(\Omega)$, die wir in weiterer Folge benötigen werden, anführen.

Satz 1.6. *$\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Definition 1.7. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt* schnell fallend*, falls*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : D^\beta f \text{ ist schnell fallend} \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}$$

heißt Schwartz-Raum*, seine Elemente heißen* Schwartz-Funktionen*.*

Wir können nun auch lineare, stetige Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ betrachten. Da trivialerweise $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definition 1.8. *Die Elemente aus $\mathcal{S}'(\Omega)$ heißen* temperierte Distributionen.

Diese Definition ist sinnvoll, da es tatsächlich Distributionen gibt, die nicht temperiert sind. Eine derartige Distribution ist etwa die von $f(x) = e^{x^2}$ induzierte Distribution. Temperierte Distributionen sind (im $\mathbb{R}^n$) all jene Distributionen, die gegen Unendlich höchstens polynomielles Wachstum besitzen.

Definition 1.9. *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann definieren wir die* Faltung *als*

$$(T * \varphi)(x) = T(\tau_x \mathcal{R}\varphi) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Auch diese Festlegung ist wiederum konsistent zur (gewöhnlichen) Faltung zweier Funktionen. Als wichtige Identität für die nachfolgenden Kapitel sei an dieser Stelle noch $\psi * \delta = \psi$ erwähnt. Die Deltadistribution ist folglich eine Art „neutrales Element“ bezüglich der Faltung.

Leider ist es aber nicht möglich, die Faltung zweier temperierter Distributionen sinnvoll zu definieren, da das Ergebnis im Allgemeinen keine temperierte Distribution ist. Ist jedoch einer der beiden Faktoren aus $\mathcal{S}$, so gibt es keine Probleme.

Kapitel 2

Fourier-Transformation

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt Distributionen eingeführt und möchten nun zu den Fourier-Transformationen schreiten, die ausgezeichnet mit Distributionen zusammenspielen. Auf genau dieses Zusammenspiel möchten wir uns hier konzentrieren und uns weniger den rechentechnischen Umgang, sondern vielmehr auf den theoretischen Hintergrund konzentrieren. Gelungene Abhandlungen sind auch unter [2] oder [7] zu finden.

2.1 Grundlegendes

Bevor wir weitere Überlegungen anstellen, möchten wir die Fourier-Transformation überhaupt einmal definieren:

Definition 2.1. *Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ setze*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

Wir bezeichnen $\mathcal{F}f$ als die Fourier-Transformierte von f *und die Abbildung $\mathcal{F}$* Fourier-Transformation. *Die Inverse ist, falls $g := \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, gegeben durch*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

Wir möchten zuerst einmal erwähnen, dass über den Vorfaktor keine Einigkeit herrscht und dieser auch in der Literatur verschieden auftritt. Außer Frage steht jedoch, dass das Produkt der Vorfaktoren aus (2.1) und (2.2) gleich $(2\pi)^{-n}$ sein muss. Insbesondere übertragen sich die gewählten Vorfaktoren auf weitere Ergebnisse, was gegebenenfalls beim Vergleichen verschiedener Quellen berücksichtigt werden muss.

Wir haben die Fourier-Transformation a priori für integrierbare Funktionen erklärt. Damit haben wir gewährleistet, dass die rechten Seiten von (2.1) und (2.2) endlich sind und daher die Fourier-Transformation wohldefiniert ist. Wie sieht aber der Bildbereich der Fourier-Transformation aus? Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir das folgende

Lemma 2.2 (von Riemann-Lebesgue)**.** *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Die Fourier-Transformation führt integrierbare Funktionen in stetige Funktionen über, die im Unendlichen verschwinden. Genauso verschwindet jede integrierbare Funktion im Unendlichen, jedoch ist umgekehrt nicht jede im unendlichen verschwindende Funktion integrierbar. Daher darf bei der Inversionsformel (2.2) die zusätzliche Forderung, dass die Fourier-Transformierte selbst wieder in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, nicht weggelassen werden.

2.2 Die Fourier-Transformation als isometrische Abbildung

Die gerade beschriebene Situation, dass für die Inversionsformel eine zusätzliche Einschränkung notwendig ist, ist natürlich unbefriedigend, daher werden wir versuchen, eine geeignete Teilmenge von $L^1(\mathbb{R}^n)$ zu finden, sodass die Inverse jeweils existiert.

Als ersten Versuch können wir die Fourier-Transformation auf $D(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ betrachten. Überraschenderweise lässt sich zeigen, dass für $\varphi \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{D}$ bereits $\varphi = 0$ folgt. Wir haben uns offensichtlich auf eine zu kleine Menge an Funktionen beschränkt.

Betrachten wir daher als nächstes die etwas größere Menge an Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Für die Funktion $f = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir $\mathcal{F}f = f$ (eine ausführliche Rechnung ist in Kapitel 3 zu finden). Wir haben also eine Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gefunden, deren Fourier-Transformierte wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Tatsächlich gilt aber sogar noch viel mehr:

Satz 2.3. *Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, dann ist auch $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dazu führen wir folgende formale Rechnung für einen Multi-Index α:

$$\begin{aligned} D^\alpha(\mathcal{F}f)(\xi) &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}e^{-ix\xi}dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)x^\alpha e^{-ix\xi}dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Differentiation unter dem Integral ist erlaubt, da mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auch $x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und dies damit aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt. Eine ähnliche Rechnung zeigt auch $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathcal{F}f$.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass $x^\alpha D^\beta(\mathcal{F}f) \to 0$ für $|x| \to \infty$ strebt. Nach obiger Rechnung gilt

$$x^\alpha D^\beta(\mathcal{F}f) = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\mathcal{F}(D^\alpha x^\beta f),$$

da nun aber auch $D^\alpha x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt nach Lemma 2.2 die Behauptung. $\square$

Wir haben nun eine Menge gefunden, die unter der Fourier-Transformation in sich selbst abgebildet wird. Diese Abbildung ist sogar bijektiv, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.4. *Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Abbildung ist durch (2.2) gegeben. Diese Bijektion ist sogar isometrisch, d.h.*

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2} \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.4}$$

Um diesen wichtigen Satz beweisen zu können, benötigen wir noch ein

Lemma 2.5. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

Das Doppelintegral $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x)$ lässt sich leider nicht direkt auswerten, für den etwas umfangreicheren Beweis des Lemmas sei daher aus Platzgründen auf die Literatur verwiesen.

Beweis. (zu Satz 2.4) Nach (2.5) gilt $\mathcal{F}^4 = id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$. Daher ist $\mathcal{F}$ bijektiv und $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Außerdem folgt

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}^2(\mathcal{F}f))(x) \overset{(2.5)}{=} (\mathcal{F}f)(-x),$$

woraus die Inversionsformel (2.2) aus (2.1) folgt. Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ eine Isometrie ist. Dazu beobachten wir zuerst, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathcal{F}g)(x)dx$$

als unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Fubini gilt. Daher gilt für das innere Produkt in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\xi)\overline{(\mathcal{F}g)(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathcal{F}\overline{(\mathcal{F}g)}(x))dx$$

Wir möchten nun den zweiten Faktor des Integranden auf der rechten Seite umformen. Setzen wir dazu $h := \mathcal{F}g$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\overline{h})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{h(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi \\
&= \overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) e^{ix\xi} d\xi} \\
&= \overline{(\mathcal{F}^{-1}h)(x)} = \overline{g(x)}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir daraus also

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \langle f, g\rangle_{L^2}$$

$\square$

Dies ist die (auch als *Parseval-Gleichung* bekannte) *Plancherel-Gleichung*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{2.6}$$

Da einerseits die Mengenungleichung $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt und andererseits schon $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, liegt auch $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Deshalb kann $\mathcal{F}$ zu einem isometrischen Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung heißt *Fourier-Plancherel-Transformation.*

Bevor wir zur Fourier-Transformation von Distributionen übergehen, möchten wir noch die wichtigsten Rechenregeln für die Fourier-Transformation schnell fallender Funktionen in einer Tabelle darstellen. Die Beziehungen folgen im Allgemeinen ziemlich direkt aus der Transformationsformel (2.1) bzw. aus der Inversionsformel (2.2)

Funktion (x)	Fourier-Transformierte (ξ)
$f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi)$
$f(x+y)$	$e^{-iy\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
$e^{ixy}f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi+y)$
$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$	$-i\xi_k\mathcal{F}f(\xi)$
$p(\frac{\partial f}{\partial x_k})f(x)$	$p(-i\xi_k)\mathcal{F}f(\xi)$
$x_k f(x)$	$-i\frac{\partial}{\partial \xi_k}\mathcal{F}f(\xi)$
$p(x)f(x)$	$p(-i\frac{\partial}{\partial \xi_k})\mathcal{F}f(\xi)$
$(f*g)(x)$	$(2\pi)^{n/2}\mathcal{F}g(\xi)\cdot\mathcal{F}f(\xi)$
$f(x)g(x)$	$(2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}f*\mathcal{F}g)(\xi)$

Tabelle 2.1: Rechenregeln für die Fourier-Transformation

2.3 Fourier-Transformation von Distributionen

Bisher haben wir uns ausschließlich auf die Fourier-Transformation von Funktionen beschränkt. Von diesen wollen wir uns aber lösen und den allgemeineren Fall der Fourier-Transformation von Distributionen betrachten. Diese kann in Analogie zur Ableitung von Distributionen eingeführt werden:

Definition 2.6. *Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}T$ durch*

$$(\mathcal{F}T)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{2.7}$$

Nun stellt sich erst einmal die Frage, inwiefern die Defintionen 2.1 und 2.6 konsistent sind, falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist und T_f die von f induzierte Distribution ist. Die Frage ist also, ob $\mathcal{F}T_f$ mit $\mathcal{F}f$ übereinstimmt. Dies ist tatsächlich der Fall, da

$$(\mathcal{F}T_f)(\varphi) = T_f(\mathcal{F}\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathcal{F}\varphi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(x)\varphi(x)dx = T_f(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Da wir die Fourier-Transformierte einer Distribution auf die Fourier-Transformation der Testfunktionen zurückgespielt haben, lassen sich die über Funktionen getroffenen Aussagen auf die Distributionen übertragen.

Satz 2.7. *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}T,$$

Beweis. Definitionsgemäß gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(\mathcal{F}(D^\alpha T))(\varphi) = (D^\alpha T)(\mathcal{F}\varphi) = T(D^\alpha \mathcal{F}\varphi)$$

und damit nach (2.3)

$$T(D^\alpha \mathcal{F}\varphi) = T(i^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha \varphi)) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}T$$

□

Es wäre natürlich wünschenswert, wenn die nützlichen Eigenschaften der Faltung zweier Funktionen in Zusammenhang mit der Fourier-Transformation auf für Distributionen erhalten bleiben. Dass dem auch tatsächlich so ist, zeigt

Satz 2.8. *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gelten*

1. $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und*

   $$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$$

   für jeden Multi-Index α.
2. $(T * \varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
3. $\mathcal{F}(T * \varphi) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathcal{F}T)$
4. $(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi)$ *für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
5. $(\mathcal{F}T) * (\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(\varphi T)$.

Die Ergebnisse können auch auf $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ausgedehnt werden, es müssen aber teils zusätzliche Anforderungen gestellt werden, etwa dass T kompakten Träger hat.

Kapitel 3

Anwendungen anhand von Beispielen

In diesem Kapitel wollen wir ganz spezielle Anwendungsfälle der Fourier-Transformation betrachten. Dabei konzentrieren wir uns bewusst auf jene Fälle, wo Distributionen eine nicht unwesentliche Rolle spielen.

Wir möchten Anfangs speziell auf die Theorie linearer Systeme eingehen, wo wir ausgehend von digitalen Systemen auf kontinuierliche Systeme fortschreiten und die Diracsche Delta-Distribution als wesentliches Hilfsmittel herausstreichen. Auf diesen Ideen aufbauend wollen wir schließlich noch ein weiteres wesentliches Anwendungsgebiet der Fourier-Transformation behandeln, nämlich partielle Differentialgleichungen. Speziell in Verbindung mit der Eigenwerttheorie ergeben sich hierfür mächtige Lösungsstrategien.

3.1 Lineare Systeme

Beginnen wir mit der Behandlung *zeitdiskreter Systeme*, die zusätzlich als linear und zeitinvariant angenommen werden. Wir interessieren uns speziell für die Antwort des Systems auf den Eingang $f(t)$, wobei hier $t \in \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ (f kann natürlich auch als komplexwertige Funktion angenommen werden).

Wir definieren den *Einheitsimpuls* δ durch

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1}$$

mit $t \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe des Einheitsimpuls können wir nun f umschreiben zu

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k) f(k),$$

was gerade der *diskreten Faltung* $f = f * \delta$ entspricht.

Kennen wir von einem linearen, diskreten und zeitinvarianten System T die Antwort $h(t) := T(\delta)(t)$ auf den Einheitsimpuls (*Sprungantwort*), können wir (zumindest formal) bereits die Systemantwort auf jedes beliebige Eingangssignal berechnen:

$$\begin{aligned} T(f)(t) &= T(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k) f(k)) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-k) f(k) \\ &= (h * f)(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dabei müssen wir aber bei $(*)$ beachten, dass die Linearität von T nur für endliche Summen gültig ist. Daher müssen T, f oder h zusätzliche Bedingungen erfüllen (etwa h oder f aus l^1), um die obige Umformung zu erlauben. Wir wollen aber für unsere weiteren Betrachtungen annehmen, dass wir die Systemantwort jeweils durch $T(f)(t) = (h * f)(t)$ berechnen können.

Nun wollen wir noch die Hintereinanderschaltung zweier Systeme T_1 und T_2 mit den zugehörigen Sprungantworten h_1 und h_2 betrachten. Formale Rechnung ergibt wiederum

$$(T_2 \circ T_1)(f) = T_2(h_1 * f) = h_2 * (h_1 * f) = (h_2 * h_1) * f$$

wobei wir bei der letzten Gleichung die Assoziativität der Faltung vorausgesetzt haben. Diese entspricht im vorliegenden Fall einer Vertauschung der Summationsreihenfolge, die aber nicht immer zulässig ist (eine hinreichende Bedingung wäre $h_1, h_2, f \in l^1$). Wir wollen nun zwei Beispiele dazu betrachten, wobei

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Beispiel 3.1. *Ein lineares, diskretes und zeitinvariantes System T habe die Impulsantwort $h(t) = \alpha^t \sigma(t)$. Die Antwort des Systems auf den Eingang $f(t) = \sigma(t)$ ist zu bestimmen.*

Wir setzen in die Faltungsformel (3.2) ein:

$$\begin{aligned} Tf(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \sigma(k) \sigma(t-k) \\ &= \sum_{k=0}^{t} \alpha^k \\ &= \frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha} \sigma(t) \end{aligned}$$

Dies doch sehr einfache Beispiel veranschaulicht auf gute Weise die Idee hinter dem Faltungsprodukt, obwohl es wie oben erwähnt diverse Fallstricke zu beachten gilt. Einen solchen Fallstrick soll das nächste Beispiel zeigen:

Beispiel 3.2. *Für zwei lineare, diskrete und zeitinvariante Systeme T_1 und T_2 seien bei festem $N \in \mathbb{N}$ die Impulsantworten h_1 und h_2 gegeben durch*

$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & \textit{für } 0 \leq t < N \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \qquad h_2(t) = 2\sin(\frac{\pi}{N})\sin(\frac{2\pi t}{N})\sigma(t)$$

Zu berechnen sind die Antworten der Systeme $(T_1 \circ T_2)$ *und* $(T_1 \circ T_2)$ *auf das Eingangssignal* $f(t) = \sin(\frac{2\pi t}{N})$

Betrachten wir zunächst $(T_1 f)(t)$:

$$(T_1 f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) f(t-k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t-k) = 0,$$

da wir über eine volle Periode des Sinus summieren. Daher folgt

$$(T_2 \circ T_1)(f)(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Würde die Assoziativität der Faltung gelten, würden wir das gleiche Resultat auch für das System $(T_1 \circ T_2)$ erwarten. Betrachten wir dazu einmal $(T_2 f)(t)$:

$$\begin{aligned}(T_2 f)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\sin(\frac{\pi}{N})\sin(\frac{2\pi k}{N})\sin(\frac{2\pi(t-k)}{N}) \\ &= \sin(\frac{\pi}{N}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\cos(\frac{2\pi(2k-t)}{N}) - \cos(\frac{2\pi t}{N})\right]\end{aligned}$$

Die letzte Summe auf der rechten Seite divergiert in Abhängigkeit von t gegen $\pm\infty$. Der Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse ist darin zu suchen, dass weder f noch h_2 in l^1 liegen.

Schreiten wir nun weiter zur Behandlung *zeitkontinuierlicher Systeme*. Wir möchten etwas Äquivalentes zum Einheitsimpuls für zeitdiskrete Systeme finden.

Wir wollen dazu ein gegebenes Eingangssignal mit Rechteck-Funktionen approximieren. Ähnlich wie in der Einleitung von Kapitel 1 verwenden wir Abtastfunktionen $r_{a,\tau}(t)$, die zum Zeitpunkt a für die Dauer τ abtasten. Bezeichnen wir das diskretisierte Eingangssignal mit $f_{d,\tau}$, so erhalten wir

$$f_{d,\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[(k-\frac{1}{2})\tau,(k+\frac{1}{2})\tau]} \int_{-\infty}^{\infty} r_{k\tau,\tau}(s) f(s) ds$$

und außerdem $\lim_{\tau \to 0} f_{d,\tau} = f$ (zumindest) für stetige f. Außerdem haben wir als Bedingung für die Abtastfunktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_{k\tau,\tau}(t) dt = 1$$

Nun führt aber im Falle des Grenzübergangs $\tau \to 0$ die letzte Bedingung gerade auf die Delta-Distribution δ. Außerdem geht die Summe zusammen mit der Indikatorfunktion in ein Integral über und wir erhalten

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_t(s) f(s) ds, \tag{3.4}$$

wobei strenggenommen $\delta_t(s)$ natürlich nicht zulässig ist, da ja δ_t eine Distribution ist.

Wenden wir nun auf (3.4) das System T an, so erhalten wir in Analogie zur Formel (3.2) für den Fall zeitdiskreter Systeme nun die *Faltungsformel* für zeitkontinuierliche Systeme

$$(Tf)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds, \tag{3.5}$$

wobei wir aber die Problematik der Vertauschung von Grenzübergang, Summation und Integration außen vor gelassen haben. Es genügen aber für ein zeitinvariantes, lineares und stetiges System T, dass $h \in L^1(\mathbb{R})$ und $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Eine wesentlich rigorosere Behandlung der letzten Schritte ist unter anderem in [3] zu finden.

3.2 Eigenfunktionen der Fourier-Transformation

Wir möchten noch die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Fourier-Transformation bestimmen. Nach Lemma 2.5 gilt $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$. Daraus folgt aber $(\mathcal{F}^4 f)(x) = f(x)$, weshalb als Eigenwerte der Fourier-Transformation nur $\pm 1, \pm i$ in Frage kommen. Außerdem erlaubt uns diese Beziehung, gezielt Eigenfunktionen zu konstruieren. Setzen wir

$$f := \varphi + \mathcal{F}\varphi + \mathcal{F}^2\varphi + \mathcal{F}^3\varphi, \tag{3.6}$$

so gilt $\mathcal{F}f = f$. Entsprechende Modifikationen der obigen Konstruktion ergeben Eigenfunktionen für die drei übrigen Eigenwerte. Nun ist aber die Darstellung (3.6) für die nähere Untersuchung der Eigenfunktionen ziemlich nutzlos.

Wir werden unsere weiteren Untersuchungen am Operator $H = -\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) + x^2$ durchführen. H heißt *harmonischer Oszillator* und dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen spielen unter anderem eine große Rolle in der Quantenmechanik. Wir werden im folgenden in einer Dimension arbeiten, da der mehrdimensionale Fall auf Produkte eindimensionaler, sogenannter *Hermite-Funktionen* zurückgeführt werden kann. Definieren wir zusätzlich die zueinander adjungierten Operatoren $A = -\left(\frac{d}{dx}\right) - x$ und $A^* = \left(\frac{d}{dx}\right) - x$ (diese heißen in der Physik *Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator*), so erhalten wir

$$A^*A = H - 1 \quad \text{und} \quad AA^* = H + 1 \tag{3.7}$$

Was sind nun die Eigenwerte von H? Angenommen, $H\varphi = \lambda\varphi$, dann folgt

$$\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle H\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, H\varphi \rangle = \overline{\lambda} \langle \varphi, \varphi \rangle ,$$

aus der Selbstadjungiertheit von H, daher ist λ reell. Mit (3.7) erhalten wir weiters

$$\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle H\varphi, \varphi \rangle = \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi, A\varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle \geq \langle \varphi, \varphi \rangle ,$$

weshalb $\lambda \geq 1$ folgt. Für den kleinstmöglichsten Eigenwert 1 ist die Differentialgleichung $A\varphi = 0$ zu lösen, deren Lösung (bis auf eine Konstante) die *Gauß-Funktion* $g(x) = e^{-x^2/2}$ ist. Für weitere Überlegungen benötigen wir ein

Lemma 3.3. *Sei φ eine Eigenfunktion von H mit Eigenwert λ. Dann ist $A^*\varphi$ eine Eigenfunktion mit Eigenwert $\lambda + 2$, während $A\varphi$ eine Eigenfunktion mit Eigenwert $\lambda - 2$ ist (letzteres solange $\lambda > 1$).*

Der Beweis dieses Lemmas beruht auf etwas Rechnung unter Ausnützung der Beziehung (3.7), weshalb wir ihn hier auslassen wollen.

Da wir nun einen Eigenwert 1 gefunden haben und weiters Eigenwerte $3, 5, \ldots$ mitsamt zugehörigen Eigenfunktionen erzeugen können, stellt sich die Frage, ob es noch weitere Eigenwerte gibt. Dies ist nicht der Fall, da wir andernfalls durch oftmaliges Anwenden von A einen Eigenwert kleiner als 1 erhalten würden, was einen Widerspruch zur Folge hätte. Auf gleichem Wege können wir argumentieren, dass alle Eigenwerte Vielfachheit 1 haben, da das für den Eigenwert 1 gilt. Wir erhalten als Eigenfunktionen (*Hermite-Funktionen*)

$$h_n(x) = c_n(A^*)^n e^{-x^2/2} = \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}(\frac{d}{dx} - x)^n e^{-x^2/2},$$

wobei die c_n so gewählt sind, dass $\|h_n\|_{L^2} = 1$ ist. Wir können obigen Ausdruck aber auch umschreiben, indem wir die auftretenden Differentiationen ausführen, und erhalten

$$h_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2},$$

wobei die c_n wie oben gewählt werden und die H_n - wenig überraschend - die *Hermite-Polynome* repräsentieren.

Die h_n bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für $L_2(\mathbb{R})$, da H selbstadjungiert ist. Daher lässt sich jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ durch die sogenannte *Hermite-Entwicklung*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle \, h_n$$

darstellen. Diese Entwicklung funktioniert insbesondere auch auf den Räumen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$.

Nun wollen wir zurück zu den Eigenfunktionen der Fourier-Transformation. Dazu beobachten wir zuerst

$$\mathcal{F}A^*\varphi = iA^*\mathcal{F}\varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{F}A\varphi = -iA\mathcal{F}\varphi.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}h_n &= c_n\mathcal{F}\left((A^*)^n e^{-x^2/2}\right)\\ &= c_n(i)^n(A^*)^n\mathcal{F}e^{-x^2/2}\\ &= i^n c_n(A^*)^n e^{-x^2/2} = i^n h_n\end{aligned}$$

und haben die h_n als Eigenfunktionen der Fourier-Transformation mit Eigenwert i^n gefunden. Außerdem haben wir

$$\mathcal{F}H\varphi = \mathcal{F}(A^*A + 1)\varphi = (A^*A + 1)\mathcal{F}\varphi = H\mathcal{F}\varphi$$

und da kommutierende Operatoren gleiche Eigenfunktionen haben, haben wir damit die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathcal{F}$ vollständig charakterisiert.

3.3 Partielle Differentialgleichungen

Gerade partielle Differentialgleichungen bieten einen sehr breiten Anwendungsbereich sowohl für Distributionen als auch für die Fourier-Transformation. Ähnlich wie schon bei den linearen, zeitinvarianten und zeitkontinuierlichen Systemen ist das Ziel, die Lösung mithilfe der Delta-Distribution aufzubauen. Wir wollen uns der Einfachheit halber auf den Laplace-Operator Δ konzentrieren, um nicht den Blick auf das Wesentliche durch einen (allgemeineren) formalen Differentialoperator zu verdecken.

Betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = g(x) \tag{3.8}$$

in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 3.4. *$U(x, \xi)$ heißt* Fundamentallösung von Δ mit Pol an ξ, *wenn $U(x, \xi)$ Lösung von*

$$\Delta u = \delta_\xi \tag{3.9}$$

im Sinne der Distributionen ist.

Wir können bereits vermuten, dass

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{3.10}$$

ein Kandidat für eine Lösung von (3.8) ist, sofern das Integral überhaupt existiert. Führen wir dazu folgende formale Rechnung durch:

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \Delta \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) (x) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Delta U(x, \xi)}_{\delta_\xi} f(\xi) d\xi \right) (x) \\
&= \langle \delta_x, f \rangle = f(x).
\end{aligned}$$

Wir können überdies für den Laplace-Operator die Fundamentallösung zum Pol ξ ganz einfach durch Translation der Fundamentallösung mit Pol 0 erhalten. Dadurch vereinfacht sich (3.10) zu

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x - \xi) f(\xi) d\xi = (U * f)(x) \tag{3.11}$$

Dieses Konzept lässt sich sogar noch erweitern, wenn wir nach Lösungen suchen, die stetig am Rand von Ω sind und Null-Randbedingungen erfüllen. Gesucht sind dann spezielle Fundamentallösungen, die am Rand verschwinden. Solche Fundamentallösungen heißen *Greensche Funktionen*.

Beispiel 3.5. *Durch*

$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln r & \text{für } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-1)S_n} r^{2-n} & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

ist eine (radialsymmetrische) Fundamentallösung des Laplace-Operators gegeben, wobei S_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet.

Leider ist es im Allgemeinen nicht einfach oder sogar nicht möglich, Fundamentallösungen oder sogar Greensche Funktionen explizit zu berechnen.

Absschließend wollen wir eine partielle Differentialgleichung mittels Fourier-Transformation lösen:

Beispiel 3.6. *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine beschränkte Lösung $u(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,\infty)$ des Problems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + \Delta_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

gesucht.

Wir Fourier-transformieren $u(x,t)$ nur in den x-Variablen und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}_x u(\xi,t) - |\xi|^2 \mathcal{F}_x u(x,t) = 0$$

mit der Anfangsbedingung $\mathcal{F}_x u(\xi,0) = \mathcal{F}f(\xi)$. Wir haben nun aber eine gewöhnliche Differentialgleichung in $\mathcal{F}_x u(\xi,t)$, die wir lösen können. Wir erhalten also

$$\mathcal{F}_x u(\xi,t) = c_1(\xi)e^{t|\xi|} + c_2(\xi)e^{-t|\xi|}$$

Da wir nur an beschränkten Lösungen interessiert sind, folgt $c_1(\xi) = 0$. Zusammen mit der Anfangsbedingung erhalten wir schließlich

$$\mathcal{F}_x u(\xi,t) = (\mathcal{F}f)(\xi)e^{-t|\xi|}$$

und daraus

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}((\mathcal{F}f)(\xi)e^{-t|\xi|}) = \mathcal{F}_x^{-1}(e^{-t|\xi|}) * f(x).$$

Mit der Rücktransformierten

$$\mathcal{F}_x^{-1}(e^{-t|\xi|}) = \pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

erhalten wir als Lösung

$$u(x,t) = \pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{t}{(t^2+(x-y)^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy.$$

Diese ist auch als *Poissonsche Integralformel für die Halbebene* bekannt und bildet einen denkbar guten Abschluss dieser Arbeit.

Schlusswort

Selbstverständlich sind die präsentierten Eigenschaften und Sätze nur eine sehr kleine Menge dessen, was über Distributionen und Fourier-Transformationen bekannt ist. Dennoch wurde versucht, eine einigermaßen abgerundete Auswahl darzubringen, um den Leser nicht vor unmotivierten Resultaten schlussendlich alleine zu lassen.

Gerade im letzten Kapitel konnten nur kleine Auszüge aus dem breiten Anwendungsgebiet gebracht werden, vielmehr ist es wohl unmöglich, alle Anwendungsgebiete aufzuzählen. An dieser Stelle seien beispielsweise die Behandlung der Heisenbergschen Unschärferelation sowie Wavelets erwähnt, die jeweils auf sehr interessante Ergebnisse führen. Es steht dem Leser natürlich frei, sich in der weiteren Literatur zu vertiefen, der erste Einstieg sollte ja nun erfolgt sein.

Bezeichnungen und Abkürzungen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Die natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Die natürlichen Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$	Die ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Die rationalen, reellen und komplexen Zahlen
$\emptyset$	Die leere Menge
$f : A \to B$	Funktion von der Menge A in die Menge B
$< f, g >_{L^2}$	Skalarprodukt der Funktionen f und g in L^2
$< T, f >$	Anwendung des Operators T auf f (kein Skalarprodukt!)
$C^\infty(\Omega)$	Menge der auf Ω unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathcal{D}(\Omega)$	Menge der Testfunktionen auf Ω ($=C^\infty(\Omega)$ - Funktionen mit kompaktem Träger $K \in \Omega$)
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Menge der stetigen, linearen Funktionale auf $\mathcal{D}$
$\mathcal{S}(\Omega)$	Menge der schnell fallenden Funktionen auf Ω
$\mathcal{S}'(\Omega)$	Menge der stetigen, linearen Funktionale auf $\mathcal{S}$
$\operatorname{supp} \varphi$	Träger der Funktion φ. Genauer: $\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$
$L^p(\Omega)$	Menge all jener Funktionen f, für die $\int_\Omega \lvert f(x)\rvert^p dx < \infty$
$L^1_{lok}(\Omega)$	Menge all jener Funktionen f, die auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ integrierbar sind.
α (Multi-Index)	Ein Tupel aus Indices
$\mathcal{R}\varphi$	Spiegelung der Funktion φ. $\mathcal{R}\varphi(x) := \varphi(-x)$
$D^\alpha f$	Partielle Ableitung der Funktion f nach den im Multi-Index angegebenen Variablen
$id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$	Die identische Abbildung in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
$l^1(\mathbb{R})$	Menge jener diskreten Funktionen f, für die $\sum_{k=\infty}^{\infty} \lvert f\rvert < \infty$
$l^\infty(\mathbb{R})$	Menge jener diskreten Funktionen f, für die $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \lvert f(x)\rvert < \infty$

Literaturverzeichnis

[1] I. M. Gelfand, G. E. Shilov. *Generalized functions, vol I.* Academic Press, 1964.

[2] T. W. Korner. *Fourier Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] W. Krabs. *Mathematical Foundations of Signal Theory.* Heldermann Verlag Berlin, 1995.

[4] A. Papoulis. *Signal Analysis.* McGraw-Hill, Auckland, etc., 1977.

[5] M. Renardy, R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer, New York, 1993.

[6] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, Inc., 1991.

[7] R. T. Seeley. *An introduction to Fourier series and integrals.* Benjamin, 1961.

[8] R. S. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* World Scientific, 2003.

[9] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer Verlag, 2004.

Index